No. 850.

1 Buch	1 ℳ	– 8
2 "	7 "	– "
3 "	– "	– "
Einband	5 "	4 "
Summa	13 ℳ	4 d

Neue Theorie

der Bezeichnung

geneigter Flächen,

nach

welcher man den Foderungen, die an eine Bergzeichnungs-Methode gemacht werden können, leichter und zuverlässiger, als bisher Genüge zu leisten vermag

von

Friedrich Wilhelm Spehr.

Mit einer Kupfertafel.

Braunschweig,
im Kunst- und geographischen Büreau.

1 8 2 3.

§. 1.

Jeder Punct einer krummen Linie in einer Ebene kann durch zwei Coordinaten bestimmt werden. Ist der Zug gesetzmäßig, so giebt es eine feste Regel, nach welcher zu jeder Abscisse, x, die Ordinate, y, berechnet werden kann, seine Natur wird durch eine Gleichung zwischen x und y, $y = \varphi(x)$, vollständig erkannt.

Jeder Punct einer Fläche kann bestimmt werden, wenn man den Abstand desselben von einer angenommenen Ebene angeben kann, d. h. wenn die Länge der Linie auszumitteln ist, welche aus jenem Puncte der Fläche auf die Fundamental-Ebene perpendiculär gezogen ist; denn der Punct, in welchem das Perpendikel die Ebene trifft, kann durch zwei rechtwinklige Coordinaten bestimmt werden, wenn man in dieser eine Abscissen-Linie und in ihr einen Anfangspunct annimmt. Man ist daher im Stande, einen jeden Punct in einer Fläche durch drei rechtwinklige Coordinaten zu bestimmen.

Ist die Fläche gesetzmäßig, so giebt es unter den drei veränderlichen Größen, x, y, z, welche die drei Coordinaten vorstellen, einen festen Zusammenhang, vermöge dessen man, wenn davon zwei bestimmt sind, die dritte findet. Die Natur einer jeden gesetzmäßig erzeugten Fläche kann durch eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Größen:

$$y = \varphi (x,z)$$

dargestellt werden, so daß, wenn für x und z alle Werthe gesetzt worden sind, dadurch alle Werthe von y, oder die Abstände eines jeden Punctes der Fläche von der Fundamental-Ebene hervorgehen.

Will man also eine durch die Gleichung:

$$y = \varphi (x, z)$$

gegebene Fläche sinnlich darstellen, so muß man in diese Gleichung für x und z nach und nach alle Werthe setzen, um die successiven Werthe von y zu erhalten. Diese für x und z zu substituirenden Werthe werden nach und nach in allen Variationsformen, die sich aus den beiden Reihen der Werthe bilden lassen, vorkommen. Um also beim Substituiren der Werthe für x und z den Regeln des Variirens gemäß zu verfahren, wird man nach und nach allen Werthen von x successiv alle Werthe von z beigesellen, d. h. man wird zuerst für x seinen niedrigsten Werth setzen, und, diesen beibehaltend, nach und nach alle Werthe für z substituiren, darauf einen folgen den Werth für x annehmen und dabei wieder alle Werthe, welche man sich für z zu substituiren vorgenommen hat, setzen u. s. f.

Nimmt man aber für x in der Gleichung:

$$y = \varphi\,(x, z)$$

einen bestimmten Werth an, so verwandelt sie sich in eine Gleichung, welche nur zwei veränderliche Größen, y, z, enthält:

$$y = \psi\,(z)$$

durch welche man, wenn für z nach und nach alle Werthe gesetzt werden, alle Zustände von y unmittelbar erhält. Dabei werden also jedesmal alle Vertical-Abstände der Fläche von der Fundamental-Ebene hervorgehen, welche zu einem und demselben x gehören, und da die Richtungen der z, wie angenommen, auf der Richtung der x senkrecht stehen, so wird dadurch jedesmal ein Durchschnitt bestimmt seyn, welchen eine sowohl auf der Fundamental-Ebene, als auch auf der Richtung der x in derselben senkrecht stehende Ebene mit der Fläche macht.

Dasselbe findet statt, wenn man jedesmal einen Werth von z bestimmt, um ihm nach und nach alle Werthe von x beizufügen; nur werden alsdann die daraus entstehenden Werthe für y einen Profil-Riß bestimmen, welcher durch den Schnitt einer Ebene entsteht, die auf der Fundamental-Ebene senkrecht, mit der Abscissenrichtung aber parallel ist.

Durch das eine oder das andere Verfahren ist man also im Stande, die durch eine gegebene Gleichung:

$$y = \varphi (x, z)$$

ausgedrückte Fläche sinnlich darzustellen, indem man dadurch alle zum Erkennen derselben nöthigen Profilrisse verzeichnen kann.

Hat man aber obige Gleichung zwischen den drei veränderlichen Größen x, y, z, so läßt sich, wenn man für y einen bestimmten Werth, a, setzt, da alsdann

$$a = \varphi (x, z)$$

ist, z jedesmal durch eine Function von x ausdrücken, so daß

$$z = \chi (x)$$

ist. Setzt man in diese Gleichung für x alle Werthe, so gehen dadurch alle diejenigen Werthe von z hervor, welche alle dasselbe y oder a bei sich führen, d. h. man erhält dadurch alle Puncte in der Fundamental-Ebene, in welchen der Abstand der Fläche von dieser immer derselbe ist, und diese Puncte müssen, wegen der Gleichung:

$$z = \chi (x)$$

in einem gesetzmäßigen Zuge liegen.

Da nun aber die durch diese Gleichung bestimmten Puncte die orthographische Projection aller der Puncte der durch die anfänglichen Gleichung gegebenen Fläche sind, welche gleiche Höhe über der Fundamental-Ebene haben, so folgt, daß man dadurch alle diese Puncte der

Fläche auf die Ebene projicirt habe. Setzt man daher für y nach und nach alle möglichen Werthe an die Stelle, und bestimmt z durch die daher entstehende Gleichung, so erhellet, daß man die Fläche durch lauter gesetzmäßige Züge oder Curven vollständig auf die Fundamental-Ebene projicirt, oder den Grundriß dargestellt habe.

§. 2.

So wie man aber in der practischen Geometrie auch unregelmäßige Züge nur durch Coordinaten bestimmen kann, eben so ist man auch gezwungen, ungesetzmäßige Flächen dadurch darzustellen.

Will man daher irgend eine unebene Fläche auf eine angenommene Fundamental-Ebene beziehen, oder sie in Grund legen, so hat man nur nöthig, jedesmal alle diejenigen Puncte auf diese zu projiciren, welche dieselbe Höhe über der Fundamental-Ebene haben. Diese Puncte werden, wenn man sie alle nimmt, einen Zug bilden, welcher aber, sobald die zu projicirende Fläche nicht gesetzmäßig ist, selbst unregelmäßig seyn wird.

In der Theorie kann man sich jede Höhe gedenken, deren Puncte man auf die Ebene durch krumme Linien projicirt, welche in diesem Falle, wie man sich auszudrücken pflegt, unendlich nahe bei einander zu stehen kommen, und so wäre die Fläche vollkommen in Grund gelegt. In der Ausübung wird man sich jedoch nur mit einigen Höhen begnügen, deren Anzahl die Individualität des Gegenstandes jedesmal bestimmt.

Man wird also beim Projiciren einer Fläche ihren höchsten Punct über der Fundamental-Ebene aufsuchen, das Perpendikel von demselben auf diese in mehrere Theile theilen, durch diese Theilungspuncte mit der Fundamental-Ebene parallelle Ebenen legen, und die Durchschnitte, welche diese mit der zu entwerfenden Fläche machen, auf die Fundamental-Ebene projiciren.

In je mehr Theile man den Vertical-Abstand des höchsten Punctes getheilt hat, desto dichter werden die projicirenden Linien bei einander zu stehen kommen, d. h. je genauer ist die Fläche in Grund gelegt. Man hat jedoch nur nöthig, die Theile so anzunehmen, daß dadurch das Stück der Fläche, welches durch benachbarte schneidende Ebenen abgesondert wird, als gleichförmig steigend angesehen werden kann. Erlaubt es alsdann noch die Deutlichkeit, welche die Zeichnung besitzen muß, so kann man zwischen jede zwei der projicirenden Linien noch eine dritte zeichnen, welches leicht ist, da diese nach der obigen Annahme die Abstände der beiden Linien in zwei gleiche Theile theilen muß u. s. f.

Ist der Winkel, welchen die Fläche mit der Fundamental-Ebene macht, unveränderlich, wie es z. B. bei der Kegelfläche der Fall ist, und hat man die Theile, in welche der Vertical-Abstand des höchsten Punctes getheilt ist, gleich angenommen: so erhalten die projicirenden Linien im Grundrisse stets einen gleichen Abstand von einander; im entgegengesetzten Falle werden diese Abstände an verschiedenen Orten auch verschieden seyn. Je größer alsdann der Winkel wird, unter welchem die Fläche ansteigt, oder je steiler die Fläche ist, desto dichter werden diese Linien bei einander zu stehen kommen.

Um z. B. ein Stück einer Cylinderfläche, wovon AB (Fig. 1.) ein Durchschnitt ist, der auf der Fundamental-Ebene senkrecht steht, zu projiciren, theile man das Perpendikel BC aus dem höchsten Puncte B der Fläche auf die Fundamental-Ebene gefällt, oder AD in mehrere, z. B. in 16 gleiche Theile, lege durch diese Theilungspuncte mit der Fundamental-Ebene parallele Ebenen, und projicire die geraden Linien, in welchen diese die Cylinderfläche schneiden, orthographisch auf die Fundamental-Ebene abcd, so werden die Linien ab gh ꝛc. die Projection der Fläche seyn.

Die zweite Figur stellt die Projection eines Kegels mit steter Böschung, die dritte die eines Kegels mit eingebogener Böschung, die vierte einen Kugel-Abschnitt, die fünfte einen Kegel-Abschnitt vor.

Wir wollen nun noch kürzlich untersuchen, welche Vortheile man erhält, wenn man unebene Flächen, und namentlich die Oberflächen der **Berge** bei Situations-zeichnungen auf diese Weise projicirt.

§. 3.

Die Haupt-Erfodernisse, welchen eine Bergzeichnung ein Genüge leisten soll, sind folgende:

1) Daß man aus der Zeichnung bequem die Gestalt des Berges **überschauen** könne;
2) daß man an jedem beliebigen Puncte sowohl die Höhe desselben, als auch den Winkel leicht und zuverlässig angeben könne, unter welchem der Berg hier ansteigt, d. h. daß man jeden beliebigen Profil-Riß leicht und genau entwerfen könne;
3) daß man auch aus jeder auf der Zeichnung gemessenen Weite leicht die wahre Entfernung beider Puncte finden könne.

Was diese Bezeichnungsart anbetrifft, so leistet sie alles auf eine auffallend einfache und so genaue Weise, wie man es nur irgend erwarten kann.

1) Die Gestalt des Berges wird man hier außerordentlich leicht übersehen können; denn jede projicirende Linie giebt die horizontale Figur an, welche der Berg bei der Höhe hat, während man aus den enger oder weiter werdenden Räumen zwischen den projicirenden Linien, d. h. aus

der mehr oder minderen Dunkelheit, welche hier von selbst entsteht, die verticale Form eben so leicht überschauet.

2) Die Höhe eines Punctes giebt die Linie an, unter welcher er liegt. Hat man den Abstand des höchsten Punctes eines Berges von der angenommenen Horizontalfläche in m gleiche Theile getheilt, wovon jeder = a Fuß ist, um durch diese Puncte die schneidenden Ebenen zu legen, so wird ein Punct in der Zeichnung des Berges, welcher auf der rten Linie nach der anfänglichen, von unten an gezählt, liegt, r. a Fuß hoch seyn. Liegen in einer Zeichnung diese Linien eine viertel Linie breit auseinander, so wird man noch im Stande seyn, den vierten Theil dieses Zwischenraums zu schätzen, also jeden Punct auf $\frac{1}{4}$ a Fuß bestimmen können. In der 7ten Figur ist z. B. der Punct p 200 Fuß hoch, wenn der Abstand des höchsten Punctes h von der angenommenen Horizontal-Ebene a b c d in 29 gleiche Theile, wovon jeder = 10 Fuß ist, eingetheilt wurde. Mißt man die Entfernung zweier projicirenden Linien, und vergleicht diese Größe mit der des Theils a, so hat man die Cotang. des Winkels, unter welchem der Berg in jenem Puncte ansteigt.

3) Die wahre Entfernung von einer Linie zur andern erhält man, wenn man die auf dem Grundrisse gemessenen Weite mit der Secante des Winkels, unter welchem der Berg in dem Puncte aufsteigt, oder die Größe a mit der Cosecante eben dieses Winkels multiplicirt.

Eine Tafel, aus der man aus der gemessenen Weite auf der Zeichnung sowohl den Winkel, unter welchem der Berg in dem Puncte aufsteigt, als auch die wahre Entfernung unmittelbar ersehen kann, wird sich ein jeder leicht aus den gemeinen trigonometrischen Tafeln ziehen können.

Wird verlangt, aus dem Grundrisse eines Berges irgend einen Profil-Riß zu zeichnen, so kann dieser Foderung ungemein leicht ein Genüge geleistet werden. Es sey z. B. der Berg (Fig. 6.), welcher hier durch 38 Linien projicirt ist, durch eine Vertical-Ebene in a b geschnitten; will man das dadurch entstandene Profil vorzeichnen, so ziehe man mit a b eine Parallel-Linie c d, fälle auf diese vom höchsten Puncte h ein Perpendikel h k, auf welches man nach dem Maaßstabe f g von k aus die 37 Theile trägt, wovon jeder = 10 Fuß ist. Darauf ziehe man sowohl durch jeden dieser Puncte mit c d parallel, als auch durch die Puncte, in welchem die angenommene Richtung a b die projicirenden Linien schneidet, mit h k parallel gerade Linien, so bestimmen die Puncte, in welchen diese Parallel-Linien zusammentreffen, das Profil.

Es ist nun aber von selbst klar, daß die projicirenden Linien, obgleich sie den Gegenstand desto genauer bestimmen, je dichter sie bei einander stehen, nicht so dicht gezeichnet werden müssen, daß sie in einander zu laufen scheinen, und dadurch das Zählen derselben unmöglich wird.

Bei der Aufnahme einer bergigen Gegend muß man den höchsten Punct derselben aufsuchen, die Höhe desselben über der angenommenen Horizontal-Ebene in gleiche Theile theilen, und sich durch diese Theilungspuncte mit der Horizontal-Ebene parallelle Ebenen vorstellen, welche sich über die ganze Gegend erstrecken, und also alle Erhöhungen, welche sich über der Horizontal-Ebene befinden, schneiden.

Bei dieser Methode, Berge zu projiciren, ist die Lösung der Aufgaben, welche man bei dieser Gelegenheit vorlegen kann, immer sehr einfach und genau. Es werde z. B. verlangt, von einem gegebenen Puncte am Fuße des Berges bis zur Kuppe einen Weg auf der Zeichnung anzugeben, welcher unter einem gegebenen Winkel gleichförmig ansteigt. Der Theil des Berges, welcher zwischen zwei projicirenden Linien liegt, kann, wie oben gesagt, als gleichförmig steigend angesehen werden. Der Abstand zweier Linien des Grundrisses, oder das Perpendikel AB (Fig. 8.) zwischen beiden, verglichen mit der Größe a giebt die Cotang. des Winkels, den die schmale Fläche, welche durch diese Linien abgesondert wird, mit der Horizontal-Ebene macht. Dieser Winkel ist nun bekanntlich der größeste, welchen Linien in dieser schmalen Ebene von A aus gezogen mit der Horizontal-Ebene bilden können; der Winkel also, unter welchem der Weg bei A aufsteigen soll, darf nicht größer seyn, als dieser. Ist dieser vorgeschriebene Winkel $= \varphi$, so ist, wenn AC die Projection des Weges zwischen diesen beiden Linien seyn soll:

$$\frac{AC}{a} = \text{Cotang. } \varphi \text{ also:}$$

$$AC = a.\ \text{Cotang. } \varphi$$

Die Linie a mit der Cotang. des gegebenen Winkels multiplicirt, stellt die Länge von AC vor. Man berechne also diese Länge (welche man auch leicht durch Construction finden kann), und beschreibe damit von A aus einen Bogen, wo dieser die nächstfolgende projicirende Linie trifft, dahin ziehe man, weil diese Fläche gleichförmig ansteigt, eine gerade Linie. Wenn aber der vorgeschriebene Winkel kleiner ist, als der, welcher AB mit dem Horizonte macht, so ist die Cotang. des ersteren größer, als die des anderen, folglich AC größer, als AB, und deshalb wird der mit AC beschriebene Bogen die nächstfolgende projicirende Linie jedesmal in zwei Puncten C und D schneiden, und man wird also den Weg anfangs nach zwei verschiedenen Richtungen zeichnen können, um der Bedingung ein Genüge zu leisten. Da der Weg beständig unter demselben Winkel aufsteigen soll, und die Größe a auch immer dieselbe ist, so folgt, daß auch das Product a. Cotang. φ immer denselben Werth behält. Um also von D oder C aus wieder unter dem Winkel φ aufzusteigen, hat man nur nöthig, mit dem Radius AC oder AD von C oder D aus in die dritte Linie einzuschneiden u. s. f. Man wird nun aber von C aus sowohl, als von D aus zwei verschiedene Wege einschlagen, also bis zur dritten Linie auf vier verschiedenen Wegen gelangen können u. s. w. Ist also der Abstand des höchsten Puncts h, des Berges in n gleiche Theile getheilt, so ist die Anzahl der Wege, welche man unter obiger Bedingung zeichnen kann $= 2^n$, und da man sich diesen Abstand in so viele Theile, als man will, getheilt vorstellen kann, so giebt es unendlich viele Wege, welche alle von A anfangend zur Kuppe führen. Mehreres bliebe hierbei jedoch noch näher zu bestimmen übrig.

Bei Fig. 9. sind z. B. die 3 Linien ah, bk und ck die Projectionen dreier Wege, welche unter einem Winkel von 20° gleichförmig anfangen, wenn auch hier a = 10 Fuß ist, und dabei der Maaßstab FG zum Grunde liegt.

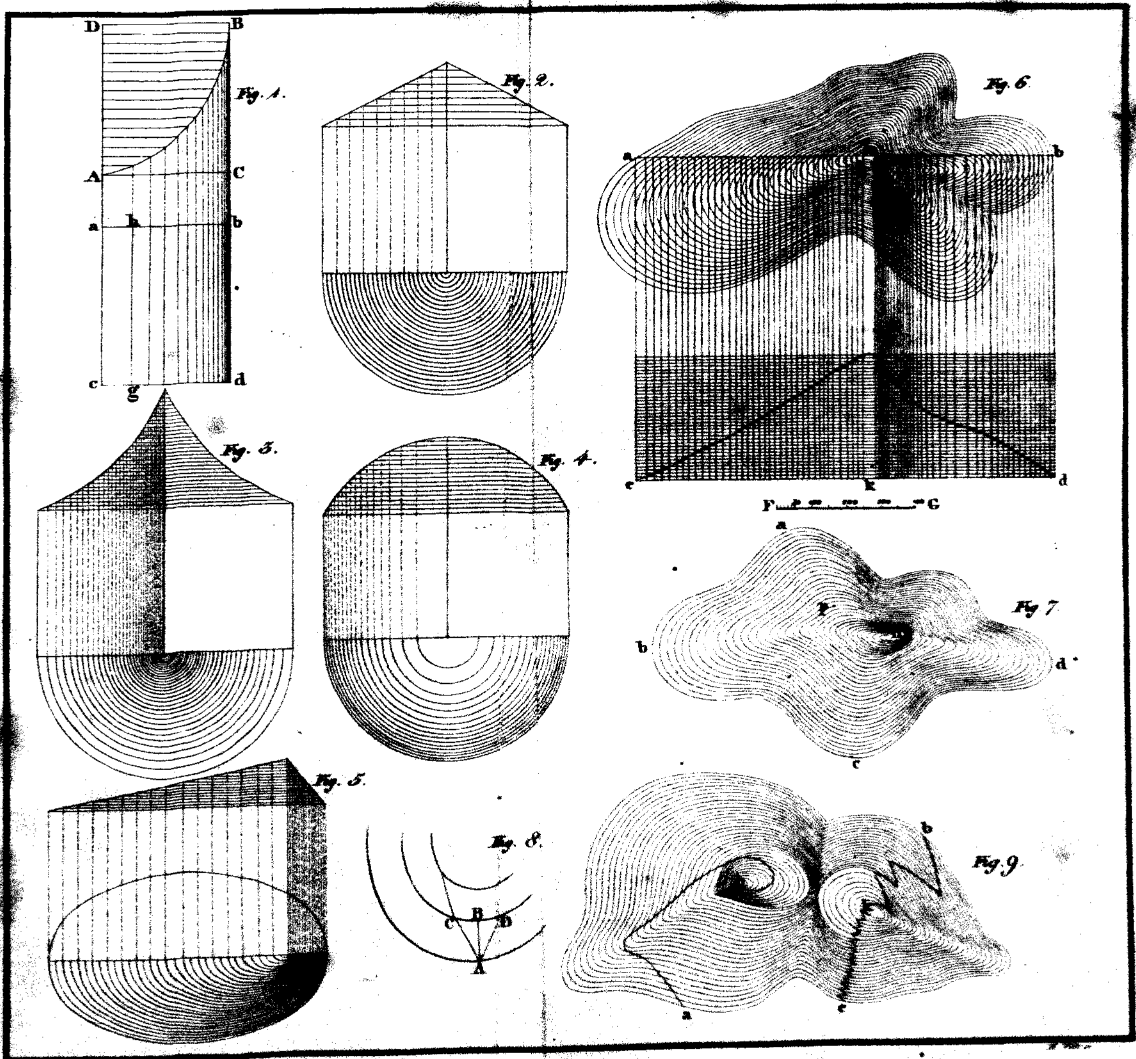
Fig. 1.
D
B
A
C
a
h
b
c
g
d
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
a
b
e
k
d
F
G
Fig. 7.
a
b
d
c
Fig. 8.
C
B
D
A
Fig. 9.
b
a
c